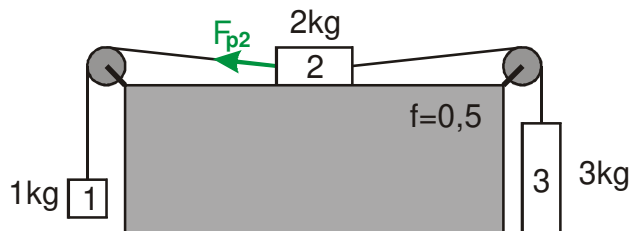


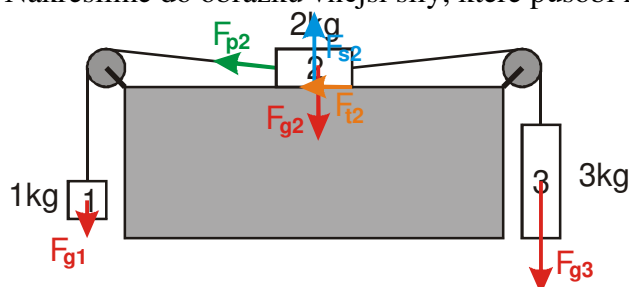
1.2.13 Tření a valivý odpor III

Předpoklady: 1212

Př. 1: Urči zrychlení soustavy závaží na obrázku. Urči vyznačenou sílu, kterou působí provázek na závaží 2. Hmotnost kladek i provázku zanedbej. Koeficient tření mezi závažími a vodorovnou rovinou se rovná 0,5.



Nakreslíme do obrázku vnější síly, které působí na jednotlivá závaží:



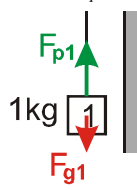
- Síly F_{g2} a F_{s2} neovlivňují urychlování soustavy.

$\Rightarrow$ Zrychlování soustavy ovlivňují síly F_{g1} , F_{t2} a F_{g3} .

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g3} - F_{g1} - F_{t2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3 g - m_1 g - m_2 g f}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3 \cdot 10 - 1 \cdot 10 - 2 \cdot 10 \cdot 0,5}{1 + 2 + 3} \text{ m/s}^2 = 1,67 \text{ m/s}^2$$

Výpočet síly F_{p2} :

Síla F_{p2} je stejně velká jako síla $F_{p1} \Rightarrow$ určíme sílu F_{p1} .



Síla F_{p1} působí proti síle F_{g1} a jejich rozdíl se rovná výslednici F_{v1} , která urychluje závaží 1 $\Rightarrow$ platí $F_{v1} = F_{p1} - F_{g1}$ (závaží zrychluje směrem nahoru) $\Rightarrow$

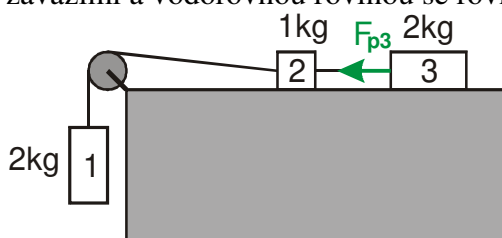
$$a = \frac{F_{v1}}{m_1} \Rightarrow F_{v1} = a m_1$$

$$F_{p1} - F_{g1} = a m_1 \Rightarrow F_{p1} = F_{g1} + a m_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a) = 1(10 + 1,67) \text{ N} = 11,7 \text{ N}$$

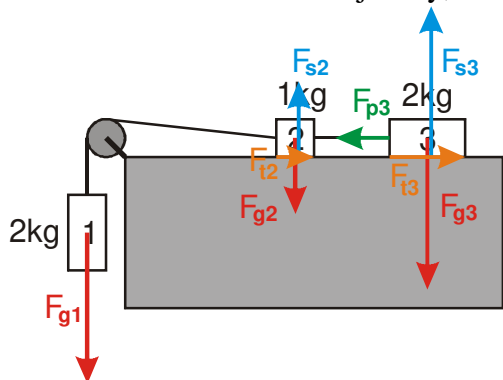
Soustava závaží na obrázku zrychluje se zrychlením $1,67 \text{ m/s}^2$, provázek působí na závaží 2 silou o velikosti 11,7 N.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je důležité, aby si studenti uvědomili, že započtením třecí síly se postup řešení vůbec nemění, pouze má na zrychlování vliv více sil a je nutné použít další vzorec při jejich konečném vyjadřování. Nečekám až celá třída spočítá sílu F_{p2} naopak, jakmile si všichni zopakují výpočet zrychlení, přerušujeme práci na příkladu 1 a přecházíme na příklad 2.

Př. 2: Urči zrychlení soustavy závaží na obrázku. Urči vyznačenou sílu, kterou působí provázek na závaží 3. Hmotnost kladek i provázku zanedbej. Koeficient tření mezi závažími a vodorovnou rovinou se rovná 0,8.



Nakreslíme do obrázku vnější síly, které působí na jednotlivá závaží:



- Síly F_{g2} a F_{s2} neovlivňují urychlování soustavy.
- Síly F_{g3} a F_{s3} neovlivňují urychlování soustavy.

$\Rightarrow$ Urychlování soustavy ovlivňují pouze síly F_{g1} , F_{t2} a F_{t3} .

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{g1} - F_{t2} - F_{t3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 g - m_2 g f - m_3 g f}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 10 - 1 \cdot 10 \cdot 0,8 - 2 \cdot 10 \cdot 0,8}{2 + 1 + 2} \text{ m/s}^2 = \frac{-4}{5} \text{ m/s}^2$$

Síla urychluje soustavu závaží vyšla -4 N. Co to znamená?

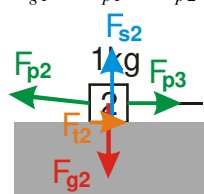
Určitě ne, že by se soustava rozjela opačným směrem (tření nikdy "nevytváří" pohyb, vždy působí proti němu) $\Rightarrow$ síla, která se snaží soustavu rozpohybovat (F_{g1}), je menší než síly, které soustavu brzdí (F_{t2} a F_{t3}) $\Rightarrow$ soustava se nebude pohybovat.

Výpočet síly F_{p3} :

Soustava nezrychluje $\Rightarrow$ nemůžeme postupovat obvyklým způsobem.

Napětí provázků způsobuje síla F_{g1} (snaží se soustavu stáhnout dolů). Soustava stojí $\Rightarrow$

$F_{g1} = F_{p1} = F_{p2}$. Nakreslíme síly působící na závaží 2.



Závaží 2 je v klidu $\Rightarrow$ výslednice působících sil je nulová $\Rightarrow$ ve vodorovném směru platí: $F_{p2} = F_{t2} + F_{p3} \Rightarrow F_{p3} = F_{p2} - F_{t2} = F_{g1} - F_{t2}$

$$F_{p3} = F_{g1} - F_{t2} = m_1 g - m_2 g f = 2 \cdot 10 - 1 \cdot 10 \cdot 0,8 \text{ N} = 12 \text{ N}$$

Soustava závaží na obrázku zůstává v klidu, na závaží 3 působí provázek silou 12 N.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se snažím, aby si co nejvíce žáků uvědomilo, jak důležitá (a zároveň docela průhledná) je interpretace výsledků, a proto se snažím, co nejvíce oddálit okamžik, kdy se nahlas začne diskutovat o tom, co znamená, že síla vyšla záporná. Ty, co mají podezření se snažím obejít v lavicích, Ty, co spočítají záporné zrychlení a ženou se dál, upozorním, aby si

hledali chybu. Ti, co si všechno uvědomí a spočítají příklad správně postupují v hodině dál a nečekají na zbytek.

Výpočet síly F_{p3} ukážu na tabuli, ale nesnažím se k němu všechny dostat.

- Př. 3:** Jarda je schopen táhnout silou 400 N. Urči, jakou největší hmotnost může utáhnout:
- a) pokud šoupá bednu po podlaze s koeficientem tření 0,7,
 - b) pokud si bednu podloží tyčemi na plot a průměru 6 cm s ramenem 0,005 m.

V obou případech se Jardaova maximální síla musí rovnat tření (smykovému nebo valivému).

a) pokud šoupá bednu po podlaze s koeficientem tření 0,7

$$F = F_t = Nf = mgf$$

$$m = \frac{F}{gf} = \frac{400}{10 \cdot 0,7} \text{ kg} = 57 \text{ kg}$$

b) pokud si bednu podloží tyčemi na plot a průměru 6 cm s ramenem 0,005 m

$$F = F_o = N \frac{\xi}{R} = mg \frac{\xi}{R}$$

$$m = \frac{FR}{g\xi} = \frac{400 \cdot 0,03}{10 \cdot 0,005} \text{ kg} = 240 \text{ kg}$$

Jarda utáhne hmotnost maximálně 57 kg, pokud si bednu podloží tyčemi může být hmotnost bedny až 240 kg.

- Př. 4:** Urči rameno valivého odporu u nákladního vozu o hmotnosti 12 t, pokud ho má utáhnout muž, který dokáže vyvinout tažnou sílu 1000 N. Průměr kol 70 cm. Jak a kde bys takový pokus realizoval.

$$m = 12 \text{ t} = 12\,000 \text{ kg}, \quad d = 70 \text{ cm} \Rightarrow r = 35 \text{ cm} = 0,35 \text{ m}, \quad F = 1000 \text{ N}, \quad \xi = ?$$

$$F = F_o = N \frac{\xi}{R} = mg \frac{\xi}{R}$$

$$\xi = \frac{FR}{mg} = \frac{1000 \cdot 0,35}{12\,000 \cdot 10} \text{ m} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Rameno valivého odporu nesmí být větší než $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Praktická realizace pokusu by vyžadovala maximální zmenšení valivého odporu:

- pevnou vodorovnou plochu bez nerovností,
- vyčištěná ložiska kol,
- přehuštěné pneumatiky.

- Př. 5:** Sánky se dvěma dětmi váží 18 kg, koeficient tření mezi saněmi a sněhem 0,15. Tatínek o hmotnosti 80 kg je táhne po vodorovné rovině silou 20 N. Jakým způsobem se pohybují?

O druhu pohybu rozhoduje velikost výsledné síly. Ve vodorovném směru na sánky působí dvě síly:

- síla smykového tření mezi saněmi a sněhem $F_t = Nf = mgf = 18 \cdot 10 \cdot 0,15 \text{ N} = 27 \text{ N}$,
- síla tatínka: $F = 20 \text{ N}$.

Třecí síla je větší $\Rightarrow$ sánky se pohybují rovnoměrně zpomaleně.

Př. 6: Sáňky se dvěma dětmi váží 20 kg, koeficient tření mezi saněmi a sněhem 0,13. Jakou silou je musí tatínek táhnout po vodorovné rovině, aby se pohybovaly:

- a) rovnoměrně b) rovnoměrně zrychleně se zrychlením $1,5 \text{ m/s}^2$.

a) rovnoměrně

Sáňe se pohybují rovnoměrně, právě když je výsledná síla nulová $\Rightarrow F_t = F$.

$$F = Nf = mgf = 20 \cdot 0,13 \cdot 10 \text{ N} = 26 \text{ N}$$

b) rovnoměrně zrychleně se zrychlením $1,5 \text{ m/s}^2$

Sáňe se pohybují rovnoměrně zrychleně $\Rightarrow$ působí na ně nenulová výsledná síla.

$$F_v = F - F_t$$

$$F = F_v + F_t = ma + Nf = ma + mgf = m(a + gf) = 20 \cdot (1,5 + 10 \cdot 0,13) \text{ N} = 56 \text{ N}$$

Pokud mají sáňe jet rovnoměrně, musí tatínek táhnout silou 26 N, pokud mají zrychlovat se zrychlením $1,5 \text{ m/s}^2$, musí táhnout silou 56 N.

Př. 7: Na adrese <http://www.chcizit.cz/brzdna-draha-automobilu-4298/> jsou uvedeny typické brzdné dráhy automobilu z různých rychlostí za různých podmínek. Odvod' obecný vzorec, který umožňuje vypočítat z uvedených hodnot předpokládaný koeficient tření mezi pneumatikami a silnicí. Urči koeficient pro jednotlivé rychlosti. Zkontroluj, zda jsou výsledky pro stejné podmínky a různé rychlosti konzistentní.

Rychlost vozu	Reakční dráha	Brzdná dráha	Dráha zastavení
Suchá silnice			
50 km/h	14 m	14 m	28 m
60 km/h	17 m	20 m	37 m
80 km/h	22 m	35 m	57 m

Pro ujasnění:

- Reakční dráha – vzdálenost, kterou vůz urazí mezi tím, než se objeví podnět a řidič zareaguje (začne brzdit) $\Rightarrow$ je stejná za všech podmínek, vůz se po ní pohybuje rovnoměrně přímočaře
- Brzdná dráha – dráha, kterou auto urazí během zastavování (předpokládáme zcela sešláplou brzdu a přibližně rovnoměrně zpomalený pohyb) $\Rightarrow$ závisí na vnějších podmínkách (ovlivňují velikost koeficientu tření mezi pneumatikami a silnicí, který rozhoduje o velikosti zrychlení auta)
- Dráha zastavení – součet předchozích vzdáleností

Řešíme dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu z počáteční rychlosti do zastavení $\Rightarrow$ provedeme záměnu za rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu do počáteční rychlosti $\Rightarrow$ určíme zrychlení auta a z něj pomocí 2. NZ koeficient tření.

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb známe: dráhu s , konečnou rychlost v , počáteční rychlost 0 km/h.

$$s = \frac{1}{2}at^2, \text{ potřebujeme se zbavit času } \Rightarrow \text{ z rovnice pro rychlost } v = at, \text{ dosadíme } t = \frac{v}{a}.$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad / \cdot a$$

$$sa = \frac{v^2}{2} \quad / : s$$

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

$$\text{Použijeme: } a = \frac{F}{m} = \frac{F_t}{m} = \frac{Nf}{m} = \frac{mgf}{m} = gf$$

$$gf = \frac{v^2}{2s} \quad / : g$$

$$f = \frac{v^2}{2sg}$$

Nyní můžeme dosadit rychlosti a dráhy pro jednotlivé případy a určit hodnoty koeficientu tření:

- $v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$, $s = 14 \text{ m}$: $f = \frac{v^2}{2sg} = \frac{13,9^2}{2 \cdot 14 \cdot 10} = 0,690$
- $v = 60 \text{ km/h} = 16,7 \text{ m/s}$, $s = 20 \text{ m}$: $f = \frac{v^2}{2sg} = \frac{16,7^2}{2 \cdot 20 \cdot 10} = 0,697$
- $v = 80 \text{ km/h} = 22,2 \text{ m/s}$, $s = 35 \text{ m}$: $f = \frac{v^2}{2sg} = \frac{22,2^2}{2 \cdot 35 \cdot 10} = 0,704$

Ve všech příkladech jsme získali přibližně stejnou hodnotu koeficientu tření.

Pro zajímavost hodnot koeficientu tření pro jiné podmínky (vždy už jen jeden výpočet):

$$\text{Mokrá silnice: } v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s} , s = 19 \text{ m} : f = \frac{v^2}{2sg} = \frac{13,9^2}{2 \cdot 19 \cdot 10} = 0,508.$$

$$\text{Náledí: } v = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s} , s = 64 \text{ m} : f = \frac{v^2}{2sg} = \frac{13,9^2}{2 \cdot 64 \cdot 10} = 0,151.$$

Shrnutí: Započtení třecí síly nic nemění na principech, kterými jsme řešili příklady se zrychlováním.